OM ANALYTISKE FUNKTIONERS UDVIKLING I RÆKKE EFTER HYPERGEOMETRISKE FUNKTIONER.[1]

AF

NIELS NIELSEN.

§ 1. Historiske bemærkninger.

C. Neumann[2]) beviste i 1862, at enhver analytisk funktion $f(x)$, som er regulær indenfor en ellipse med brændpunkterne $(+1, 0)$ og $(-1, 0)$, i dette omraade kan udvikles i række efter kuglefunktioner af første art, nemlig

$$f(x) = a_0 P^0(x) + a_1 P^1(x) + a_2 P^2(x) + \ldots, \tag{1}$$

medens enhver analytisk funktion $F(x)$, som er regulær udenfor ovennævnte ellipse, i dette omraade kan udvikles i række efter kuglefunktioner af anden art, nemlig

$$F(x) = A_0 Q^0(x) + A_1 Q^1(x) + A_2 Q^2(x) + \ldots. \tag{2}$$

Konvergensomraadet for enhver af rækkerne (1) og (2) afhænger altsaa alene af den funktion, der skal udvikles.

Disse sætninger af *Neumann* er af stor interesse, idet de, saavidt jeg ved, giver det første eksempel paa rækker, hvis led er analytiske funktioner, og hvis konvergensgrænse ikke er en cirkel, idet disse rækker ikke, som de *Bürmannske*, er simple transformationer af potensrækker og tillige skal kunne tjene til at fremstille alle funktioner, der er regulære i et bestemt omraade.

---

[1]) En udførligere fremstilling af disse undersøgelser vil blive publiceret i *Annales de l'Ecole Normale* i Paris.

[2]) Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach Kugelfunktionen erster und zweiter Art. Halle a. S. 1862.

I den henseende er de ligeledes af *C. Neumann*[1]) fundne rækkeudviklinger efter cylinderfunktioner af første art kun af mere sekundær interesse, idet deres konvergensgrænse altid er en cirkel.

I et brev til *Neumann* har jeg vist, hvorledes alle de nævnte rækker kan udvikles ud fra et almindeligt princip[2]), medens jeg i mit skrift om de generaliserede kuglefunktioner[3]) har almindeliggjort formlen (1), idet jeg har vist, at enhver funktion $f(x)$, der er regulær indenfor en ellipse med brændpunkterne (0, 0) og (1, 0), i dette omraade kan udvikles i en række af formen

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F(-n, \alpha + n, \beta, x),$$

hvor α og β er vilkaarlige parametre, idet β dog hverken maa være 0 eller negativ hel. Her afhænger konvergensomraadet altsaa ligeledes udelukkende af den funktion, der skal udvikles.

I mit ovennævnte skrift[4]) har jeg ligeledes generaliseret (2), idet jeg indfører funktionen

$$(4) \; F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s)\,\Gamma(\alpha_2 + n + s) \ldots \Gamma(\alpha_{p+1} + n + s)}{s!\,\Gamma(\beta_1 + n + s) \ldots \Gamma(\beta_{p-1} + n + s)\,\Gamma(\beta_p + 2n + s)} x^{n+s},$$

hvor $n \geqq 0$ er et helt tal, og hvor parametrene α_s og β_s er vilkaarlige, dog saaledes at 0 og negative hele værdier er udelukkede.

Enhver analytisk funktion $f(x)$ af den komplekse variable $x = \alpha + i\beta$, der er regulær i det indre af den lukkede kurve med ligningen

$$(5) \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\,\alpha}{a(a+1)} - \frac{\alpha^2}{a(a+1)} - \frac{(2a+1)^2 \beta^2}{4a^2 (a+1)^2} = 0, \; a > 0,$$

kan i dette omraade udvikles i en række af formen

$$(6) \qquad f(x) = A_0 F_0(x) + A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x) + \ldots;$$

konvergensomraadet for (6) afhænger derfor alene af den givne funktion.

---

[1]) Theorie der Besselschen Funktionen; Leipzig 1867. Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; 1868, p. 221—256. Mathematische Annalen. Bd. 3, p. 581—610; 1871.

[2]) Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. 61, p. 33—61; 1909.

[3]) Théorie des fonctions métasphériques, p. 175—177; Paris 1911.

[4]) Loc. cit. p. 169—172.

Her skal vi kort behandle andre rækkeudviklinger efter hypergeometriske funktioner. I dette øjemed indføres de $p+q$ parametre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, \tag{7}$$

der blot skal vælges saaledes, at 0 og negative hele værdier er udelukkede; sættes for alle hele $n \geqq 0$

$$A_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\Gamma(\alpha_2+n)\ldots\Gamma(\alpha_p+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\Gamma(\beta_2+n)\ldots\Gamma(\beta_q+n)}, \tag{8}$$

skal vi løse følgende opgaver:

Første problem: Sættes for alle hele $n \geqq 0$

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_{n+s}}{s!} x^{n+s}, \quad p \leqq q+1, \tag{9}$$

skal enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, udvikles i en række af formen

$$f(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots, \tag{10}$$

hvor koefficienterne a_s alle er uafhængige af x.

Andet problem: Sættes for alle hele $n \geqq 0$

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} A_{n+s} x^{n+s}, \quad p \leqq q, \tag{11}$$

skal enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, udvikles i en række af formen

$$f(x) = a_0 G_0(x) + a_1 G_1(x) + a_2 G_2(x) + \ldots, \tag{12}$$

hvor koefficienterne a_s alle er uafhængige af x.

I de ovennævnte problemer spiller tilfældene $p \leqq q$ eller $p \leqq q-1$ kun en mere underordnet rolle; ti i dette tilfælde gælder rækkeudviklingerne (10) og (12) i det indre af konvergenscirklen for den potensrække, der for $|x|$ tilstrækkelig lille fremstiller $f(x)$[1]).

De ovennævnte rækker af *C. Neumann* efter cylinderfunktioner af første art, falder ind under denne art udviklinger.

Almindeligt problem: Man kunde søge at generalisere rækken (11), idet man i definitionerne for $F_n(x)$ erstatter $\alpha_r + n$ og $\beta_r + n$ med

[1]) Loc. cit. p. 165—168.

henholdsvis $\alpha_r + a_{n,r}$ og $\beta_r + b_{n,r}$, hvor elementerne i de $p+q$ talfølger

$$a_{0,r},\ a_{1,r},\ a_{2,r},\ \ldots,\ a_{n,r},\ \ldots,\quad 1 \leqq r \leqq p$$
$$b_{0,r},\ b_{1,r},\ b_{2,r},\ \ldots,\ b_{n,r},\ \ldots,\quad 1 \leqq r \leqq q$$

er hele, aldrig negative tal, saaledes at for alle r

$$a_{n+1,r} \geqq a_{n,r},\quad b_{n+1,r} \geqq b_{n,r}$$
$$\lim_{n=\infty} a_{n,r} = +\infty,\quad \lim_{n=\infty} b_{n,r} = +\infty.$$

Det er da aabenbart, at den i (6) angivne række faas som specielt tilfælde, idet man sætter

(13) $p = q+1;\ a_{n,r} = n,\ 1 \leqq r = p;\ b_{n,r} = n,\ 1 \leqq r \leqq q-1;\ b_{n,q} = 2n,$

medens (10) specielt erholdes, idet man for alle r sætter

(14) $$a_{n,r} = b_{n,r} = n.$$

I § 5 skal vi behandle endnu et specielt tilfælde af denne art; derved fremgaar det tydelig, at det saaledes nævnte almindelige problem rimeligvis er overordentlig vanskeligt.

§ 2. Almindelige metoder.

I mit ovennævnte skrift[1]) har jeg fremstillet en metode, som satte mig istand til fuldstændig at undersøge de i § 1 nævnte rækker (3) og (6) og i alt væsentlig tillige (10). Af hensyn til de øvrige i § 1 stillede opgaver maa denne metode imidlertid generaliseres lidt.

I dette øjemed vil vi ved M betegne et i x-planen beliggende areal med følgende egenskaber:

1°. M skal være begrænset af en enkelt lukket kurve, der omslutter $x = 0$, og saaledes at nedre grænse for de absolute værdier af radiivektorerne fra $x = 0$ til kurvens punkter ikke er 0.

2°. Betegner x en vilkaarlig til M hørende værdi, skal det være muligt at lægge en helt i M beliggende kontinuert kurve fra 0 til x.

Indføres den ny variable t, og gennemløber tx den i 2° nævnte kontinuerte kurve fra 0 til x, vil t gennemløbe en kontinuert kurve, der forbinder punkterne 0 og 1.

---

[1]) Loc. cit. p. 49—54.

Indføres dernæst de $2p$ parametre

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p;\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_p,$$

der kan vælges ganske vilkaarlig, idet blot 0 og hele negative værdier er udelukkede, beviser man uden vanskelighed sætningen:

I. *Forudsættes en af de to potensrækker*

$$(1)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n) \cdots \Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n) \cdots \Gamma(\beta_p + n)} a_n x^n$$

overhovedet at konvergere, har den anden samme egenskab; de to rækker har endvidere samme konvergensradius, og de ved rækkesummerne definerede analytiske funktioner $f(x)$ *og* $\varphi(x)$ *forholder sig regulært i samme omraade* M.

For at bevise denne sætning ved induktion, kan vi aabenbart antage $p = 1$; endvidere forudsætter vi, at potensrækken for $f(x)$ er konvergent med konvergensradius r.

Lad dernæst $C_{0,1}$ være en kontinuert kurve, der forbinder punkterne $x = 0$ og $x = 1$, uden at omslutte noget af disse punkter, og lad os endvidere antage $C_{0,1}$ uden sløjfer; da haves for

$$(2)\qquad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta - \alpha) > 0$$

under anvendelse af det første *Eulerske* integral

$$(3)\quad \int_{C_{0,1}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}\,dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}.$$

Betegner dernæst x en fast værdi, saaledes at $|x| < r$, er det muligt at vælge kurven $C_{0,1}$ saaledes at rækken

$$f(xt) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (xt)^n$$

er ligelig konvergent, naar t gennemløber $C_{0,1}$; hertil kræves nemlig blot, at den kurve, xt samtidig beskriver, aldrig kommer udenfor cirklen med centrum i 0 og radius $|x|$.

Antages betingelserne (2) opfyldte, faas dernæst ved anvendelse af (3)

$$(4)\quad \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int\limits_{C_{1,0}} f(tx)\, t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1}\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)} a_n x^n;$$

potensrækken for $\varphi(x)$ konvergerer derfor, og dens konvergensradius kan aldrig være mindre end r.

Antages endvidere $f(x)$ regulær i omraadet M af ovennævnte beskaffenhed, og er x en vilkaarlig til M hørende værdi, kan kurven $C_{0,1}$ vælges saaledes, at integralet i (4) eksisterer; $\varphi(x)$ er derfor også regulær i M.

Er betingelserne (2) ikke mere opfyldte, maa der eksistere to saadanne positive hele tal p og q, at

$$(5)\qquad \Re(\alpha) > -p, \quad \Re(\beta-\alpha) > -q;$$

sættes dernæst

$$f_p(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + a_{p+2} x^{p+2} + \cdots,$$

ses det, at integralet

$$(6)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha+q)} \int\limits_{C_{0,1}} f_p(tx)\, t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha+q-1}\, dt$$

fremstiller en i omraadet M regulær funktion, og at man for $|x| < r$ altid har

$$(7)\qquad \varphi_{p,q}(x) = \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n+q)} a_n x^n.$$

Ifølge (7) haves imidlertid for $q \geqq 1$

$$x D_x \varphi_{p,q}(x) + (\beta+q-1)\, \varphi_{p,q}(x) = \varphi_{p,q-1}(x),$$

og altsaa er funktionen $\varphi_{p,0}(x)$ og som følge deraf tillige $\varphi(x)$ selv en i M regulær analytisk funktion.

Den gennem potensrækkerne (1) udtrykte afhængighed mellem funktionerne $f(x)$ og $\varphi(x)$ betegner vi ved symbolet

$$(8)\qquad \varphi(x) = \delta_p(\alpha, \beta) f(x)$$

og altsaa haves, idet parametrene α og β ombyttes

$$(9)\qquad f(x) = \delta_p(\beta, \alpha)\, \varphi(x)$$

Tager man i ovenstaaende bevis funktionen $\varphi(x)$ til udgangspunkt, erholdes $f(x)$ ved (9), og vor sætning er derigennem fuldstændig bevist. Ligeledes er det umiddelbart indlysende, hvorledes man ved anvendelse af det krumlinede integral i (3) kan generalisere de i § XV af mit skrift om kuglefunktionerne givne sætninger.

Rækkevidden af den i (8) definerede operation i det tilfælde hvor $f(x)$ er en hypergeometrisk funktion, ligger ogsaa lige for.

Da flere simple rækkeudviklinger efter hypergeometriske funktioner, som vi senere faar anvendelse for, er saakaldte *Bürmannske* rækker, skal vi her kort omtale den af *Puiseux*[1]) i alt væsentlig givne teori for disse rækker. Denne teori findes f. eks. gengivet af *Schlömilch*[2]) og, aabenbart inspireret af ham, ligeledes af *Julius Petersen*[3]).

Antages potensrækken

$$(10) \qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n + \cdots$$

at have konvergensradien $r > 0$, og er $\varphi(x)$ en analytisk funktion, konvergerer rækken

$$(11) \qquad A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 (\varphi(x))^2 + \cdots + A_n (\varphi(x))^n + \cdots$$

aabenbart henholdsvis ubetinget og ligelig i enhver del af x-planen, for hvilken henholdsvis

$$(12) \qquad |\varphi(x)| < r, \quad |\varphi(x)| \leqq r - \delta,$$

hvor δ er en vilkaarlig lille positiv størrelse.

Er der flere indbyrdes adskilte dele af x-planen, for hvilke betingelserne (12) er opfyldte, vil rækken (11) i almindelighed fremstille forskellige funktioner i hver enkelt af disse dele.

Er α et nulpunkt for $\varphi(x)$, kan man altid om α afgrænse et omraade, begrænset af en enkelt kurve uden dobbeltpunkter, og saaledes at for alle x, tilhørende dette omraade, ulighederne i (12) er opfyldte.

Ved A vil vi betegne et omraade i x-planen, begrænset af en enkelt kurve K uden dobbeltpunkter og tilfredsstillende betingelserne:

1⁰. $\varphi(x)$ er regulær i A og har i dette omraade kun det ene nulpunkt $x = \alpha$, der er af første orden.

2⁰. Er x et vilkaarligt til A hørende tal, har ligningen $\varphi(y) = \varphi(x)$ ikke andre i A beliggende løsninger for y end $y = x$.

[1]) Journal de Mathématiques pures et appliquées, Bd. 15, p. 380—384; 1850.

[2]) Compendium der höheren Analysis, Bd. II, p. 100—108; Braunschweig 1879.

[3]) Forelæsninger over Funktionstheori, p. 173—178; Kbhvn. 1895. Vorlesungen über Funktionstheorie, p. 157—161; Kbhvn. 1898.

3⁰. I A haves stedse $\varphi'(x) \neq 0$.

Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i A, kan da i dette omraade fremstilles ved en række af formen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (\varphi(x))^n, \tag{13}$$

hvor man aabenbart finder

$$A_0 = f(\alpha), \quad A_1 = \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}; \tag{14}$$

almindelig haves

$$n!\, A_n = D_x^{n-1}\left(\left(\frac{x-\alpha}{\varphi(x)}\right)^n f'(x)\right)_{x=\alpha}. \tag{15}$$

Formlen (15) er det eneste os bekendte bidrag af *Bürmann* til en teori for de rækker, der bærer hans navn; denne formel er os endda kun overleveret i en rapport af *Lagrange* og *Legendre*[1]). *Bürmanns* afhandling er aabenbart aldrig bleven trykt, skønt ovennævnte rapport anbefalede det.

Schlömilchs udtalelse om beskaffenheden af *Bürmanns* undersøgelser virker derfor noget forbløffende, selv om de maaske nok er rigtige. Den *Bürmannske* formel (15) er iøvrig meget elegant bevist af *Petersen*.

Vi maa dog udtrykkelig bemærke, at rækken (13) meget vel kan have et *større* konvergensomraade end det ved de angivne betingelser bestemte; ja, at der kan eksistere rækkeudviklinger af denne art, selv om disse betingelser overhovedet ikke er opfyldte.

I de følgende undersøgelser benytter vi stedse betegnelserne

$$\psi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots, \tag{16}$$

$$f(x) = \delta_p(\alpha, \beta)\, \psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \tag{17}$$

og altsaa haves for alle n:

$$a_n = \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\,\Gamma(\alpha_2 + n)\cdots\Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\,\Gamma(\beta_2 + n)\cdots\Gamma(\beta_p + n)}\, b_n. \tag{18}$$

---

[1]) Mémoires de l'Institut, Bd. 2, p. 15; 1795.

§ 3. Løsning af det første problem.

For at løse den første af de i § 1 stillede opgaver gaar vi ud fra den *Bürmannske* række, som dannes af funktionen

(1) $$\varphi(x) = \frac{x}{1 - x},$$

der i hele planen har det eneste simple nulpunkt $x = 0$. Sættes $x = \alpha + i\beta$, ser man, at de i § 2 nævnte betingelser er opfyldte for ethvert omraade $\Omega(r)$, for hvilket

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 < r^2((\alpha - 1)^2 + \beta^2).$$

For $r < 1$ bliver $\Omega(r)$ det indre af en vis cirkel, for $r = 1$ sammensættes $\Omega(r)$ af alle endelige x, for hvilke $\Re(x) < -\frac{1}{2}$, medens $\Omega(r)$ for $r > 1$ bliver den del af planen, der ligger udenfor en vis cirkel. Det er indlysende, at ethvert omraade $\Omega(r)$ maa indeholde punktet $x = 0$, og at intet saadant omraade kan indeholde punktet $x = 1$.

Enhver analytisk funktion $F(x)$, der forholder sig regulært i et omraade $\Omega(r)$, kan altsaa i dette omraade udvikles i en række af formen

(3) $$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x}{1 - x}\right)^n,$$

hvor ifølge § 2, (15) $A_0 = F(0)$ og almindelig

(4) $$n!\, A_n = D_x^{n-1}((1 - x)^n F'(x))_{x=0} = D_x^n((1 - x)^{n-1} F(x))_{x=0}.$$

Da den i den stillede opgave behandlede række ikke indeholder noget konstant led, maa vi transformere rækken (3), idet vi sætter

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{1 - x}, \quad F(x) = (1 - x)\,\psi(x);$$

i henhold til vore bemærkninger om, at $\Omega(r)$ ikke indeholder punktet $x = 1$, ses det umiddelbart, at $\psi(x)$ er regulær i ethvert saadant omraade, hvor $F(x)$ har denne egenskab, og altsaa haves sætningen:

I. *Enhver analytisk funktion* $\psi(x)$, *der er regulær i et omraade* $\Omega(r)$, *kan i* $\Omega(r)$ *fremstilles ved en række af formen*

(5) $$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{(1 - x)^{n+1}},$$

og koefficienterne i denne række bestemmes ved udtrykket

(6) $$n!\,A_n = D_x^n\left((1-x)^n\,\psi(x)\right)_{x=0}.$$

Anvendes potensrækken § 2, (16) for $\psi(x)$, erholdes ved (6)

(7) $$A_n = \sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}b_{n-s}.$$

De i (3) og (5) fremstillede rækker, der iøvrig er betragtede mange gange tidligere, er blandt de faa *Bürmannske* rækker, hvis konvergensomraade altid bestemmes ved de i § 2 angivne betingelser.

Eksempel 1. Af (3) og (4) findes umiddelbart den i omraadet $\Omega(1)$ gyldige udvikling

(8) $$(1-x)^{-\nu-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{\nu}{n}\frac{x^n}{(1-x)^{\alpha+n}}.$$

Eksempel 2. Rækken

(9) $$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$$

er gyldig i omraadet $\Omega(4)$, altsaa i den del af x-planen, som ligger udenfor cirklen

(10) $$(\alpha-\tfrac{4}{3})^2+\beta^2=\tfrac{4}{9},\quad x=\alpha+i\beta.$$

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha,\beta)$, og sættes

$$F_n(x) = \delta_p(\alpha,\beta)\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

faas for alle n, idet $|x|<1$

(11) $$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\binom{n+s}{s}\frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\cdots\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\cdots\Gamma(\beta_p+n+s)}x^{n+s},$$

og denne funktion er altsaa, bortset fra en simpel faktor, en hypergeometrisk funktion af højere orden. Den første parameter i $F_n(x)$ er ganske vist det hele tal n; men denne specielle form kan hæves, idet man f. eks. sætter $\beta_p = 1$.

Sætter man i (11) $p+1$ istedetfor p og $\alpha_{p+1}=\alpha$, $\beta_{p+1}=1$, finder man for funktionen $\Phi_n(x)$ bestemt ved

(12) $$\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!}\Phi_n(x) = F_n(x)$$

følgende udtryk

(13) $$\Phi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\alpha+n+s-1}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1+n+s)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\alpha_p+n+s)}{\Gamma(\beta_1+n+s)\cdot\cdots\cdot\Gamma(\beta_p+n+s)} x^{n+s}.$$

Er her specielt $p = 1$, og sættes $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \gamma$, erholdes

(14) $$\Phi_n(x) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\cdot x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

altsaa paa en simpel faktor nær en sædvanlig hypergeometrisk funktion.

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa formlen (5) faas med betegnelserne § 2, (16) og (17) den almindelige sætning:

II. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, hvis tilsvarende transformerede*

(15) $$\psi(x) = \delta_p(\beta, \alpha) f(x)$$

er regulær i et omraade $\Omega(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen

(16) $$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \Phi_n(x),$$

hvor $\Phi_n(x)$ er den i (13) definerede hypergeometriske funktion af højere orden.

Koefficienterne A_n i (16) bestemmes ifølge (7) og (12) ved udtrykket

(17) $$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha+n-1}{s} \frac{\Gamma(\beta_1+n-s)\cdots\Gamma(\beta_p+n-s)}{\Gamma(\alpha_1+n-s)\cdots\Gamma(\alpha_p+n-s)} a_{n-s}.$$

Sættes $p = 1$, og kombineres formlerne (14) og (17), faas den speciellere sætning:

III. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, hvis tilsvarende transformerede $\psi(x)$ er regulær i et omraade $\Omega(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen*

(18) $$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x),$$

hvis koefficienter bestemmes ved udtrykket

$$(19)\quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\alpha + n - 1}{s}\binom{\beta + n - 1}{s} : \binom{\gamma + n - 1}{s} \cdot a_{n-s}.$$

I mit skrift om de generaliserede kuglefunktioner[1]) har jeg kun behandlet den del af ovennævnte rækkeudviklinger, der svarer til omraader $\Omega(r)$, hvor $r \leq 1$.

Anvendes transformationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa den specielle formel (9), faas et eksempel paa rækker af ovennævnte art svarende til omraadet $\Omega(4)$.

Af den specielle formel (8) faas følgende ejendommelige rækkeudvikling

$$(20)\quad F(\alpha + \nu, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

hvor, for alle n,

$$(21)\quad A_n = \binom{\nu}{n}\binom{\beta + n - 1}{n} : \binom{\gamma + n - 1}{n};$$

denne række har konvergensomraadet $\Omega(1)$.

§ 4. Løsning af det andet problem.

For at løse den anden af de i § 1 stillede opgaver gaar vi ud fra den *Bürmannske* række svarende til funktionen

$$(1)\quad \varphi(x) = x - x^2 = x(1 - x),$$

der i hele x-planen har de to simple nulpunkter $x = 0$, $x = 1$, medens den afledede funktion

$$(2)\quad \varphi'(x) = 1 - 2x$$

har det simple nulpunkt $x = \frac{1}{2}$, og ikke andre.

Den tilsvarende række

$$(3)\quad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x - x^2)^n$$

---

[1]) Loc. cit. p. 168.

er, tildels i en noget almindeligere skikkelse, undersøgt af de i § 2 nævnte forfattere: *Puiseux, Schlömilch* og *Petersen*; men disse undersøgelser er ufuldstændige.

Har potensrækken $\Sigma A_n x^n$ konvergensradien $r > 0$, konvergerer rækken (3) i omraadet $\Omega(r)$ bestemt ved betingelsen

(4) $$|x - x^2| < r;$$

dette omraade begrænses derfor af en *Cassinisk* ellipse $C(r)$ med brændpunkterne (0, 0) og (1, 0) og med ligningen i retvinklede koordinater

(5) $$(\alpha^2 + \beta^2)((\alpha - 1)^2 + \beta^2) = r^2, \quad x = \alpha + i\beta.$$

For $r > \frac{1}{4}$ bestaar $C(r)$ af en lukket gren uden singulære punkter, for $r = \frac{1}{4}$ er kurven en lemniskat med dobbeltpunktet $(\frac{1}{2}, 0)$, medens $C(r)$ for $r < \frac{1}{4}$ bestaar af to adskilte ovaler $O_1(r)$ og $O_2(r)$, der omslutter hver sit af brændpunkterne, nemlig henholdsvis (0, 0) og (1, 0).

I det følgende betegner $O(r)$ en vilkaarlig af disse ovaler, naar $r \leqq \frac{1}{4}$; for $r > \frac{1}{4}$ haves derimod de letforstaaelige ligninger

(6) $$O_1(r) = O_2(r) = C(r).$$

Om rækken (3) vil vi nu bevise følgende sætninger:

I. *Fremstiller rækken* (3) *samme funktion* $F(x)$ *i hele sit konvergensomraade* $\Omega(r)$, *maa* $F(x)$ *tilfredsstille funktionalligningen*

(7) $$F(1 - x) = F(x);$$

denne betingelse tilfredsstilles derfor altid af rækkesummen, naar i konvergensomraadet $\Omega(r)$ *konstanten* $r > \frac{1}{4}$.

Denne sætning er en umiddelbar følge af, at funktionen $x - x^2$ og konvergensomraadet $\Omega(r)$ bliver uforandrede, naar x erstattes med $1 - x$.

Antages $r \leqq \frac{1}{4}$, vil rækken (3) derimod i almindelighed fremstille to forskellige funktioner i de to adskilte dele af konvergensomraadet.

Eksempel 1. Af identiteten

$$(1 - 2x)^{2\nu} = (1 - 4(x - x^2))^\nu,$$

hvis to led for $x = 0$ skal antage værdien 1, faas ved anvendelse af binomialformlen den i det indre af ovalen $O_1(\frac{1}{4})$ gyldige række

(8) $$(1 - 2x)^{2\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\nu}{n} 2^{2n} (x - x^2)^n.$$

Sættes

$$\log(-1) = \pi i,$$

faas derimod i det indre af ovalen $O_2(\frac{1}{4})$

(9) $$e^{-2\nu\pi i}(1-2x)^{2\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\nu}{n} 2^{2n} (x-x^2)^n.$$

II. *Enhver analytisk funktion* $F(x)$, *der tilfredsstiller funktionalligningen* (7), *og som er regulær i det indre af den Cassiniske ellipse* $C(r)$ *kan i hele dette omraade udvikles i en række af formen* (3).

Denne sætning bevises let, idet man udvikler højre side af identiteten

(10) $$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{(y-\frac{1}{2})-(x-\frac{1}{2})} = \frac{(\frac{1}{2}-y)+(\frac{1}{2}-x)}{(y-y^2)-(x-x^2)}$$

efter potenser af $(x-x^2):(y-y^2)$, derpaa multiplicerer med $f(y)$ og anvender *Cauchys* fundamentalsætning[1]).

Det er aabenbart, at de i § 2 nævnte betingelser for omraadet A her kun kan tilfredsstilles naar A er en af ovalerne $O(r)$ svarende til $r \leqq \frac{1}{4}$, og altsaa haves sætningen:

III. *Enhver analytisk funktion* $\psi(x)$, *der er regulær i omegnen af et af punkterne* $x=0$ *eller* $x=1$, *kan udvikles i en række af formen*

(11) $$\psi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (x-x^2)^n,$$

og dennes konvergensomraade er det indre af den tilsvarende Cassiniske oval $O(r)$, *for hvilken i almindelighed* $r \leqq \frac{1}{4}$. *Et større konvergensomraade er kun muligt under de i* II *angivne betingelser.*

Vi bemærker, at denne sætning let bevises udfra identiteten (10) ved den ovenfor angivne fremgangsmaade.

Er $\psi(x)$ den i § 2, (16) definerede funktion, og er ovalen $O_1(r)$, faas ved § 2, (15) for koefficienter A_n i (11)

(12) $$A_0 = b_0, \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} b_{n-s}.$$

[1]) Sammenlign behandlingen af rækken § 5, (5).

Eks. 2. Ved anvendelse af § 2, (15) faas umiddelbart den i det indre af ovalen $O_1(\frac{1}{4})$ gyldige rækkeudvikling

$$(13) \qquad (1 - x)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\nu}{\nu + 2n} \binom{\nu + 2n}{n} (x - x^2)^n.$$

For at anvende operationen $\delta_p(\alpha, \beta)$ paa formlen (11) benytter vi stedse de i § 2, (16), (17) og (18) angivne betegnelser; sættes endvidere

$$\delta_p(\alpha, \beta)(x - x^2)^n = F_n(x),$$

findes for alle $n \geqq 0$

$$(14) \quad F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + s) \cdots \Gamma(\alpha_p + n + s)}{\Gamma(\beta_1 + n + s) \cdots \Gamma(\beta_p + n + s)} x^{n+s},$$

medens koefficienterne A_n ved anvendelse af (12) og § 2, (18) antager formen

$$(15) \qquad A_0 = \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_p)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_p)} a_0$$

og for $n \geqq 1$:

$$(16) \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n - s}{n + s} \binom{n + s}{s} \frac{\Gamma(\beta_1 + n + s) \cdots \Gamma(\beta_p + n + s)}{\Gamma(\alpha_1 + n + s) \cdots \Gamma(\alpha_p + n + s)} a_{n-s}.$$

Med disse betegnelser faas sætningen:

IV. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x = 0$, kan udvikles i en række af formen*

$$(17) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n F_n(x),$$

hvis konvergensomraade er det indre af en Cassinisk oval $O_1(r)$, hvor almindeligvis $r \leqq \frac{1}{4}$. Kun i det tilfælde, hvor den til $f(x)$ svarende transformerede funktion $\psi(x)$ tilfredsstiller de i II *nævnte betingelser, kan ovennævnte konvergensomraade blive det indre af en Cassinisk ellipse $C(r)$, hvor $r > \frac{1}{4}$.*

Sættes specielt $p = 1$, $\alpha_1 = \beta$ og $\beta_1 = \gamma$, antager (17) formen

$$(18) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(-n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

hvor $A_0 = a_0$, og for $n \geqq 1$

$$(19) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{n-s}{n+s} \binom{n+s}{s} \binom{\beta + n - 1}{s} : \binom{\gamma + n - 1}{s} \cdot a_{n-s}.$$

Eks. 3. Af (13) faas den i det indre af ovalen $O_1\left(\frac{1}{4}\right)$ gyldige formel

$$(20) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n F(-n, \beta + n, \gamma + n, x),$$

hvis koefficienter bestemmes ved udtrykket

$$(21) \qquad A_n = \frac{\alpha}{\alpha + 2n} \binom{\alpha + 2n}{n} \binom{\beta + n - 1}{n} : \binom{\gamma + n - 1}{n}.$$

Vi kan ikke her gaa nærmere ind paa de af identiteten (10) dannede mærkelige rækkeudviklinger og deres egenskaber, men maa indskrænke os til at henvise til den udførligere fremstilling af nærværende arbejde.

Det er aabenbart, at disse rækker staar i nøje forbindelse med en klasse hele polynomier, som jeg har undersøgt ved anden lejlighed[1]).

§ 5. Bemærkninger om det almindelige problem.

For at behandle et andet specielt tilfælde af det i § 1 nævnte almindelige problem gaar vi ud fra en række af formen

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1-x} \right)^n;$$

denne række kan ikke behandles efter den i § 2 angivne almindelige metode; ti her har udviklingsfunktionen $\varphi(x)$ et nulpunkt af anden orden i $x = 0$.

[1]) Nyt Tidsskrift for Matematik. Bd. 22, p. 73—85; 1911.

Har potensrækken $\Sigma A_n x^n$ konvergensradien $r > 0$, konvergerer rækken (1) henholdsvis absolut eller ligelig, eftersom henholdsvis

$$(2) \qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| < r, \qquad \left|\frac{x^2}{1-x}\right| \leqq r - \delta,$$

hvor δ er en vilkaarlig lille positiv størrelse. Konvergensomraadet for rækken (1) er derfor det indre af den lukkede kurve $K(r)$ med ligningen i retvinklede koordinater

$$(3) \qquad (\alpha^2 + \beta^2)^2 - r^2((\alpha - 1)^2 + \beta^2) = 0, \quad x = \alpha + i\beta.$$

Man ser, at $K(r)$ kan dannes af den i § 4 betragtede *Cassiniske* ellipse $C(r)$, idet man istedetfor x sætter $1 : x$.

For $r < 4$ bestaar $K(r)$ af en enkelt lukket gren uden singulære punkter; for $r = 4$ er der et singulært punkt, nemlig dobbeltpunktet $(2, 0)$, hvis sløjfe omslutter $(1, 0)$. Antages endelig $r > 4$, er $K(r)$ sammensat af to ovaler, af hvilke den største $O(r)$ omslutter $K(4)$, medens den mindste $o(r)$ i sit indre indeholder punktet $(1, 0)$ og omsluttes af sløjfen hørende til dobbeltpunktet af $K(4)$.

Da $x^2 : (1 - x)$ ikke forandres, naar x erstattes med $x : (x - 1)$, har ifølge (2) kurven $K(r)$ og de to dele af planen begrænsede af $K(r)$ samme egenskab, og altsaa gælder sætningen:

I. *Enhver funktion $F(x)$, der kan udvikles i en konvergent række af formen* (1) *tilfredsstiller funktionalligningen*

$$(4) \qquad F\left(\frac{x}{x-1}\right) = F(x).$$

For at kunne vende denne sætning om og bevise eksistensen af visse almindeligere rækkeudviklinger vil vi gaa ud fra identiteten

$$\frac{1}{y-x} = \frac{y(1-x)+x}{(1-x)(1-y)} \cdot \frac{1}{\dfrac{y^2}{1-y} - \dfrac{x^2}{1-x}}$$

og den derved dannede rækkeudvikling

$$(5) \quad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+1}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(1-y)^n}{y^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

Gennemløber y en vilkaarlig kurve $K(r)$, er rækkerne paa højre side i (5) henholdsvis absolut eller ligelig konvergente baade med

hensyn til x og y, naar x er beliggende henholdsvis i det indre af $K(r)$ eller paa $K(r-\delta)$ og i dens indre, naar δ betegner en vilkaarlig lille positiv størrelse.

Lad nu $F(x)$ være en analytisk funktion, der er regulær i det indre af en vis kurve $K(r)$, og lad x betegne en fast værdi i det indre af $K(r)$; multipliceres i identiteten (5) med $F(y)$, og integreres langs en kurve $K(r')$ der omslutter x og saaledes at $r' < r$, faas følgende sætning:

II. *Enhver analytisk funktion $F(x)$, der er regulær i det indre af en kurve $K(r)$, kan i dette omraade udvikles i en række af formen*

$$(6) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}}.$$

For koefficienterne i denne række giver ovennævnte metode let udtrykkene

$$(7) \quad (2n)!\, A_n = D_x^{2n}((1-x)^n F(x))_{x=0}, \quad (2n+1)!\, B_n = D_x^{2n+1}((1-x)^n F(x))_{x=0}.$$

Det ses umiddelbart, at rækken (6) ogsaa kan bringes paa formen

$$(8) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^{2n}}{(1-x)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} (B_n - A_n) \frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{n+1}};$$

sættes endvidere

$$A'_0 = A_0, \quad A'_n = A_n + \tfrac{1}{2} B_{n-1},$$

faas desuden af (6)

$$(9) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A'_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n + \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n;$$

det er aabenbart, at rækkeudviklingerne (8) og (9) har nøjagtig samme konvergensomraade som (6).

Af II i forbindelse med formlen (9) faas umiddelbart den til I svarende omvendte sætning:

III. *Enhver analytisk funktion $F(x)$, der tilfredsstiller funktionalligningen* (4), *og som er regulær i omegnen af punktet $x=0$, kan udvikles i en række af formen* (1).

Ifølge II kan $F(x)$ udvikles i en række af formen (9); sættes i denne række $x:(x-1)$ istedetfor x, erholdes

$$(10)\quad F\left(\frac{x}{x-1}\right)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A'_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n-\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)x}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^n,$$

og altsaa haves, for alle n, $B_n=0$, naar $F(x)$ skal tilfredsstille (4).

Er $F(x)$ den i sætningen II betragtede funktion, og sættes

$$(11)\qquad \psi(x)=\frac{F(x)}{(1-x)^\alpha},\quad F(x)=(1-x)^\alpha\,\psi(x),$$

hvor α er et vilkaarligt kompleks tal, er $\psi(x)$ vel regulær i omegnen af punktet $x=0$, medens $x=1$ almindeligvis er et forgreningspunkt for denne funktion.

Det er imidlertid aabenbart, at de af (6) og (8) dannede rækkeudviklinger

$$(12)\qquad \psi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n\frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n}}+\sum_{n=0}^{n=\infty}B_n\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}$$

$$(13)\qquad \psi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_n\frac{x^{2n}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}+\sum_{n=0}^{n=\infty}(B_n-A_n)\frac{x^{2n+1}}{(1-x)^{\alpha+n+1}}$$

har samme konvergensomraade som rækken i (6).

Da anvendelsen af den sædvanlige transformation paa rækkerne (12) og (13) ingen vanskelighed frembyder, skal vi, idet vi iøvrig henviser til den udførligere fremstilling af dette arbejde, indskrænke os til her at anføre følgende sætning som et af resultaterne af ovennævnte transformation:

IV. *Enhver analytisk funktion $f(x)$, der er regulær i omegnen af punktet $x=0$, kan udvikles i rækker af formen*

$$(14)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}A_nx^nF(\alpha+n',\ \beta+n,\ \gamma+n,\ x)$$

$$(15)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}B_nx^nF(\alpha+n'',\ \beta+n,\ \gamma+n,\ x),$$

hvor n' og n'' er de hele tal, der defineres ved betingelserne

$$\frac{n}{2} \leqq n' \leqq \frac{n+1}{2} \leqq n'' \leqq \frac{n+2}{2}. \tag{16}$$

Konvergensomraadet for disse rækker er det indre af den kurve $K(r)$, indenfor hvilken funktionen

$$(1-x)^{\alpha} (\delta_1 (\gamma, \beta) f(x)) \tag{17}$$

forholder sig regulært.

Sammenholdes disse rækker med den i § 1 angivne udvikling (6), der ligeledes er et specielt tilfælde af den i det almindelige problem forekommende rækkeudvikling, synes det at fremgaa, at dette almindelige problem aabenbart er ret vanskeligt.